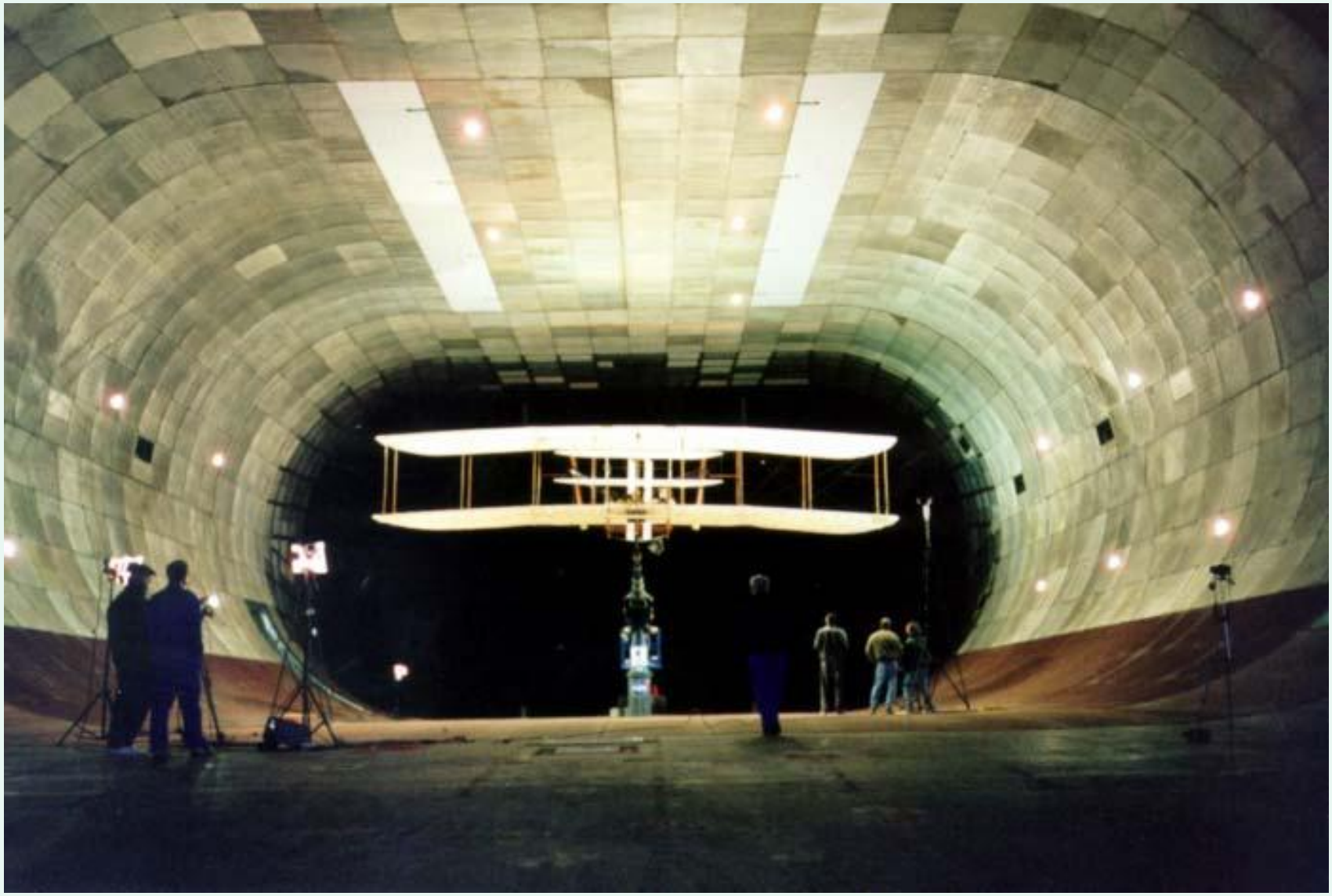
ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SEMEJANZA



ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SEMEJANZA

- **EXPERIMENTACIÓN EN MECÁNICA DE FLUIDOS**
- **ADIMENSIONALES EN MECÁNICA DE FLUIDOS**
- **SEMEJANZA DE MODELOS**
    - Ensayos con modelos
    - Leyes de semejanza
    - Semejanza de Froude
    - Semejanza de Reynolds
    - Semejanza de Mach

EXPERIMENTACIÓN EN MECÁNICA DE FLUIDOS

Las ***ecuaciones fundamentales*** de un flujo son generalmente insuficientes para la solución completa de un problema. Habría que recurrir a la experimentación.

Pueden intervenir hasta **9 *magnitudes físicas***, por lo que parece imposible la experimentación. Afortunadamente, en un problema concreto, no influirán más de **6**; pero todavía es excesivo.

Mediante el ***análisis dimensional*** podemos formar ***agrupaciones adimensionales*** y trabajar con ellas en lugar de con las magnitudes físicas reales. Con ello se reduce el número de variables a (n – m):

n = número de magnitudes **físicas** que intervienen

m = número de magnitudes **básicas** que intervienen (masa, longitud y tiempo, como mucho)

Cuantas menos agrupaciones resulten, menos experiencias hay que hacer: una agrupación requeriría una experiencia; dos agrupaciones varias experiencias (10 por ejemplo) para construir una curva, y tres nos llevaría a varias (10 curvas y/o 100 experiencias, por ejemplo).

Una ventaja adicional que nos proporciona la teoría dimensional es la de predecir los resultados de un proyecto, en base a los obtenidos ensayando con un ***modelo*** a escala.

ADIMENSIONALES EN MECÁNICA DE FLUIDOS

Para establecer los posibles ***adimensionales***, supongamos que intervienen a la vez todas las posibles fuerzas sobre el flujo: de ***presión***, de ***gravedad***, de ***fricción***, de ***elasticidad*** y de ***tensión superficial***.

Expresemos la resultante $(\overrightarrow{\Sigma F})$, o fuerza de inercia $(\overrightarrow{F_i})$, que provoca la aceleración del flujo, en función de la velocidad ***u***:

$$\Sigma F = F_i = m \cdot a = (\rho \cdot l^3) \cdot (l \cdot t^{-2}) =$$

$$= \rho \cdot l^2 \cdot (l \cdot t^{-1})^2 = \rho \cdot l^2 \cdot u^2$$

Fuerza de presión (p):

$$F_p = l^2 \cdot p$$

Fuerza de gravedad (g):

$$F_g = l^3 \cdot \rho \cdot g$$

Fuerza viscosa (μ):

$$F_r = l^2 \cdot \tau = l \cdot u \cdot \mu$$

Fuerza elástica (K):

$$F_K = l^2 \cdot K$$

Fuerza tensión superficial (σ)

$$F_\sigma = l \cdot \sigma$$

Sumando las cinco fuerzas e igualándolas a la de inercia:

$$l^2 \cdot p + l^3 \cdot \rho \cdot g + l \cdot u \cdot \mu + l^2 \cdot K + l \cdot \sigma = \rho \cdot l^2 \cdot u^2$$

Expresión que relaciona **8 *magnitudes físicas:***

$$f\,(l,\, p,\, \rho,\, g,\, u,\, \mu,\, K,\, \sigma) = 0$$

Si hubiera dos longitudes características, lo que ocurre con frecuencia, resultarían **9 *magnitudes físicas*** en lugar de **8.**

Dividamos la primera ecuación por la fuerza de inercia:

$$\varphi\left(\frac{p}{\rho \cdot u^2},\ \frac{l \cdot g}{u^2},\ \frac{\mu}{\rho \cdot l \cdot u},\ \frac{K}{\rho \cdot u^2},\ \frac{\sigma}{\rho \cdot l \cdot u^2}\right) = 0$$

en la que intervienen **5** variables **(*adimensionales*)**, en lugar de las **8 (*dimensionales*)**.

$$\varphi\left(\frac{p}{\rho\cdot u^2},\ \frac{l\cdot g}{u^2},\ \frac{\mu}{\rho\cdot l\cdot u},\ \frac{K}{\rho\cdot u^2},\ \frac{\sigma}{\rho\cdot l\cdot u^2}\right)=0$$

Estos adimensionales suelen expresarse de la siguiente forma:

Coeficiente de presión $=\dfrac{p/\rho}{u^2/2}$

Los cuatro restantes cambiémoslos de manera que la velocidad ***u*** quede en el numerador con exponente uno.

$$\boxed{\varphi\left(\frac{p/\rho}{u^2/2},\ \frac{u}{\sqrt{l\cdot g}},\ \frac{\rho\cdot l\cdot u}{\mu},\ \frac{u}{\sqrt{K/\rho}},\ \frac{u}{\sqrt{\sigma/\rho\cdot l}}\right)=0}$$

$$\varphi\left(\frac{p/\rho}{u^2/2}, \frac{u}{\sqrt{l\cdot g}}, \frac{\rho\cdot l\cdot u}{\mu}, \frac{u}{\sqrt{K/\rho}}, \frac{u}{\sqrt{\sigma/\rho\cdot l}}\right)=0$$

Número de Froude $\mathrm{Fr}=\dfrac{u}{\sqrt{l\cdot g}}$

Número de Reynolds $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho\cdot l\cdot u}{\mu}=\dfrac{l\cdot u}{\nu}$

Número de Mach $\mathrm{Ma}=\dfrac{u}{\sqrt{K/\rho}}=\dfrac{u}{a}$

$\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}=a$ (velocidad del sonido). Si $\mathrm{Ma}>1$, supersónico

Número de Weber $\mathrm{We}=\dfrac{u}{\sqrt{\sigma/\rho\cdot l}}$

$$\frac{p/\rho}{u^2/2} = f\,(\mathrm{Fr},\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Ma},\ \mathrm{We})$$

Si hubiera dos longitudes características en el problema, l y l', el cociente l/l', ó l'/l, sería otra variable adimensional:

$$\frac{p/\rho}{u^2/2} = f\,(\mathrm{Fr},\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Ma},\ \mathrm{We},\ l/l')$$

En cada caso se eliminarán aquellos adimensionales cuya intervención sea nula o poco importante.

Wiliam Froude

Inglaterra (1810-1879)

Osborne Reynolds
Belfast (1842-1912)

Ernst Mach
Austria (1839-1916)

Moritz Weber

Alemania (1871-1951)

Ensayos con modelos

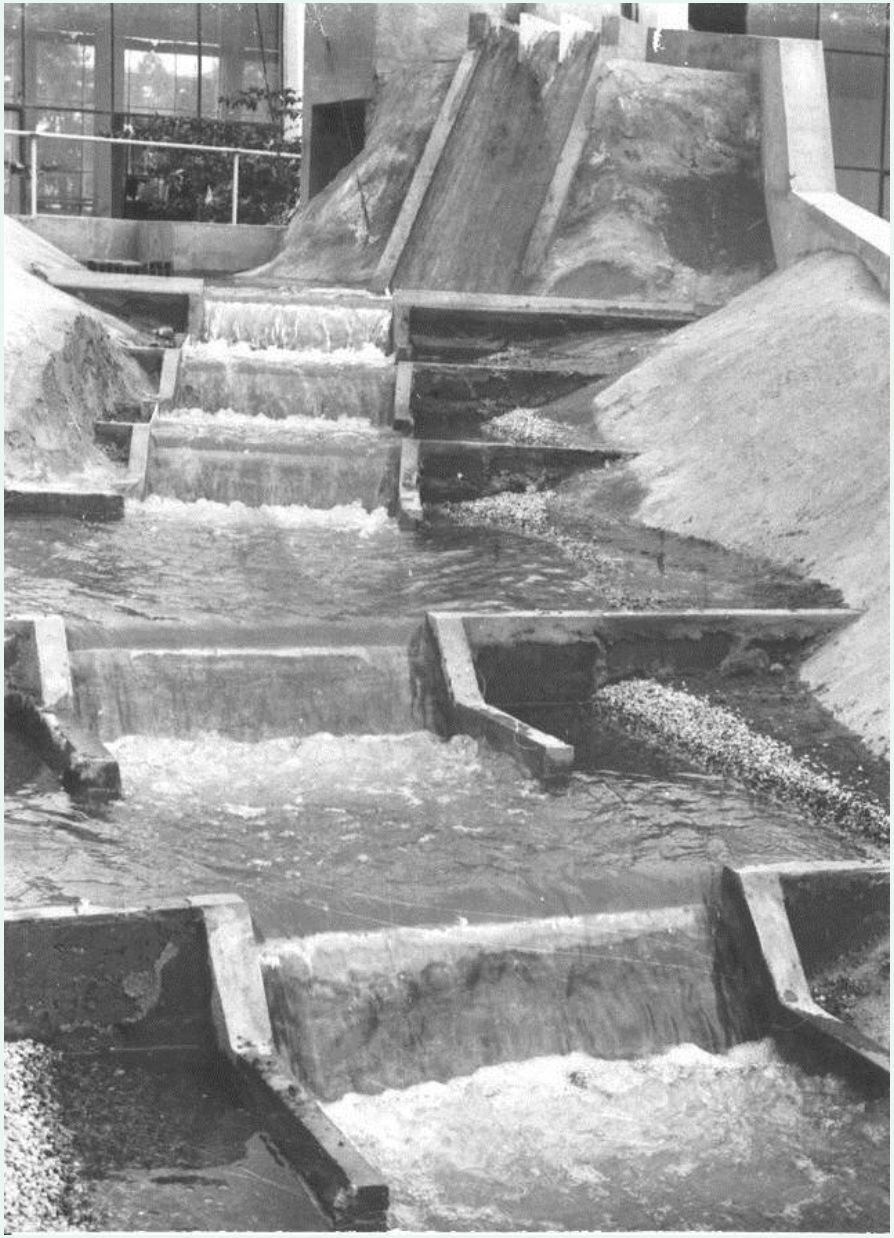
Los modelos se hacen de materiales muy diversos: madera, escayola, metales, hormigón, plástico, etc.

No es necesario ensayar con el mismo fluido que utilice el prototipo. El agua y el aire son los fluidos que generalmente se utilizan, por su disponibilidad.

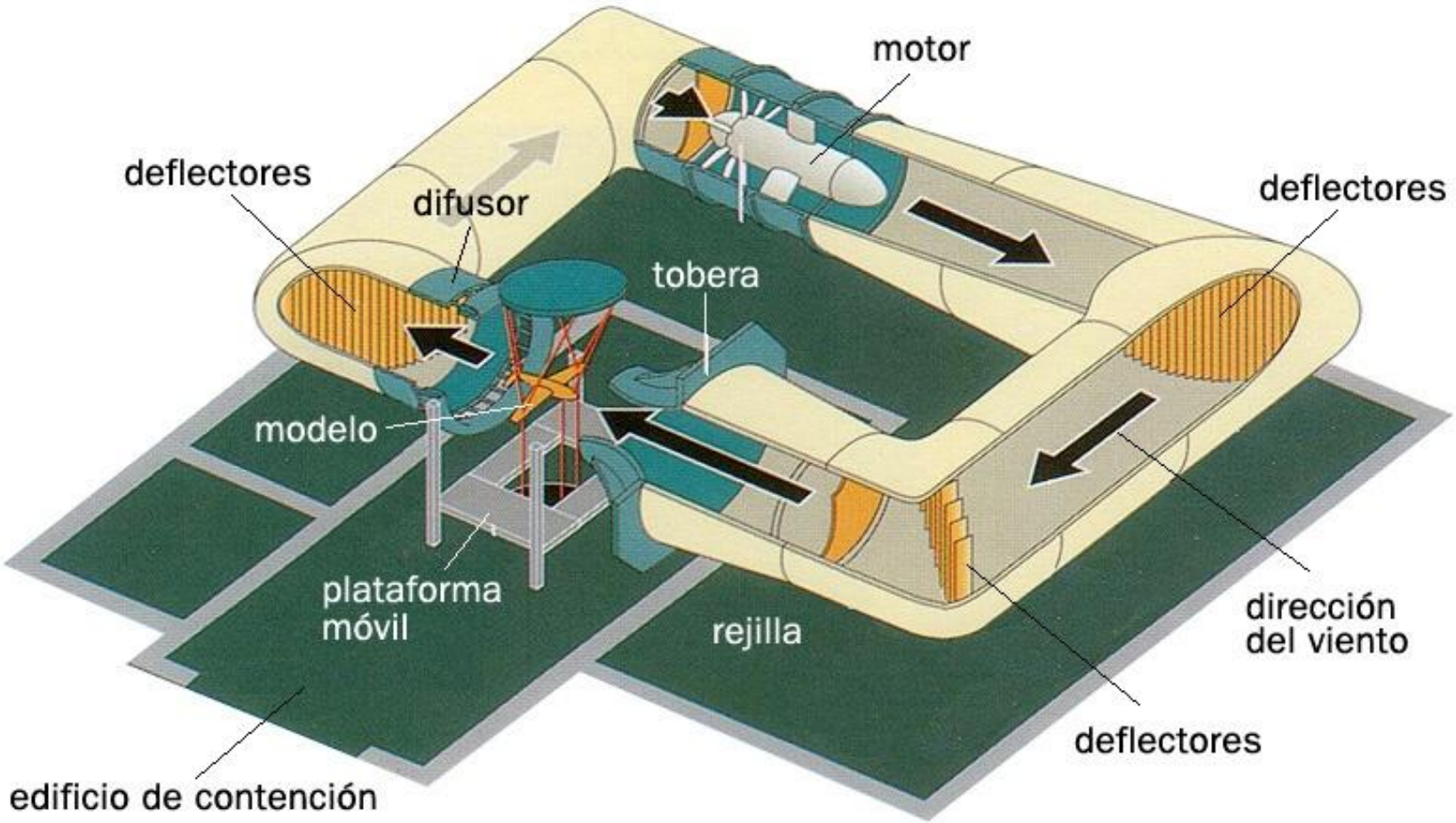
Los ensayos de canalizaciones, puertos, presas, aliviaderos, etc, se hacen en ***laboratorios de hidráulica.***

Los ensayos de modelos de aviones, y en general de cuerpos sumergidos, se hacen en ***túneles de viento*** y en ***túneles de agua.***

Los ensayos de barcos se hacen en los llamados ***canales hidrodinámicos.***

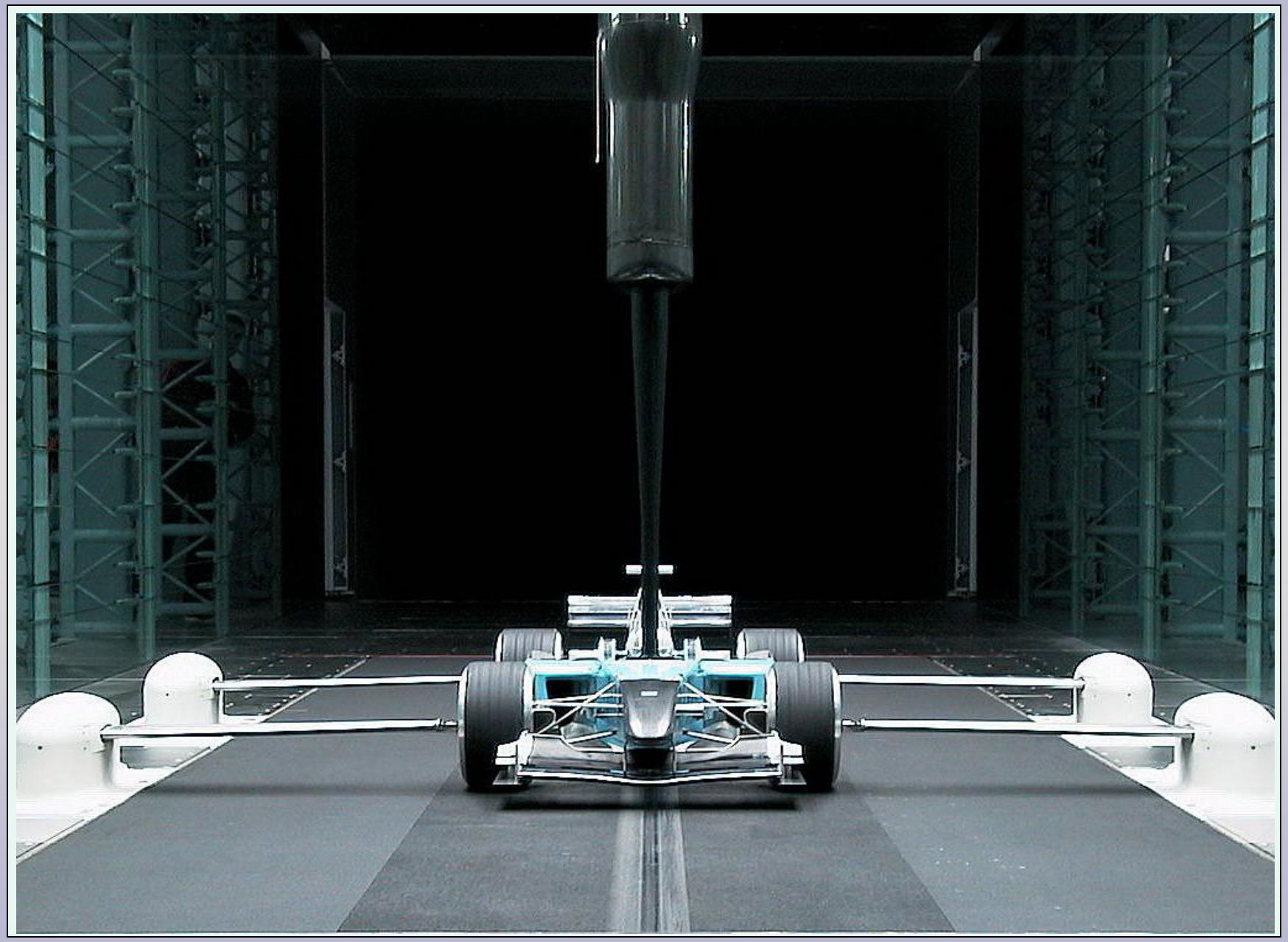


BMW Windkanal


motor
deflectores
difusor
deflectores
tobera
modelo
plataforma
móvil
rejilla
dirección
del viento
deflectores
edificio de contención

Audi
uvex
Audi

NLR
DNW
LST



Leyes de semejanza

Dos corrientes fluidas son semejantes cuando las líneas de flujo de una lo sean respecto a las homólogas de la otra; diremos entonces que existe ***semejanza cinemática***. Para ello es necesario,

a) *Semejanza geométrica*

$$\frac{l_p}{l_m} = \lambda; \qquad \frac{l_p^2}{l_m^2} = \lambda^2; \qquad \frac{l_p^3}{l_m^3} = \lambda^3$$

siendo λ la escala.

b) *Semejanza dinámica.*

Las fuerzas en puntos homólogos del modelo y del prototipo han de ser semejantes:

$$Re_p = Re_m;\ Fr_p = Fr_m;\ Ma_p = Ma_m;\ We_p = We_m$$

a) Cuando el flujo presenta una superficie libre, la fuerza predominante es la gravedad: ***semejanza de Froude,***

$$\mathbf{Fr_p = Fr_m}$$

b) Cuando el cuerpo está sumergido en un flujo subsónico, la fuerza predominante es la viscosidad: ***semejanza de Reynolds,***

$$\mathbf{Re_p = Re_m}$$

c) Cuando el cuerpo está sumergido en un flujo supersónico, la fuerza predominante es la compresibilidad: ***semejanza de Mach,***

$$\mathbf{Ma_p = Ma_m}$$

d) En láminas de líquido muy delgadas prima la tensión superficial: ***semejanza de Weber,***

$$\mathbf{We_p = We_m}$$

Semejanza de Froude

$$\mathrm{Fr}_\mathrm{p} = \mathrm{Fr}_\mathrm{m}$$

Relación de velocidades

$$\frac{u_\mathrm{p}}{\sqrt{l_\mathrm{p} \cdot g_\mathrm{p}}} = \frac{u_\mathrm{m}}{\sqrt{l_\mathrm{m} \cdot g_\mathrm{m}}} \qquad \frac{u_\mathrm{p}}{u_\mathrm{m}} = \sqrt{\lambda \cdot \frac{g_\mathrm{p}}{g_\mathrm{m}}}$$

y si $g_\mathrm{p} = g_\mathrm{m}$, como es lo habitual:

$$\boxed{\frac{u_\mathrm{p}}{u_\mathrm{m}} = \lambda^{1/2}}$$

Por ejemplo, si $\lambda = 25$, $u_\mathrm{p} / u_\mathrm{m} = 5$.

Relación de caudales $(Q = S \cdot u)$

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{S_p}{S_m} \cdot \frac{u_p}{u_m}$$

$$\boxed{\frac{Q_p}{Q_m} = \lambda^{5/2}}$$

Para $\lambda = 25$, $Q_p/Q_m = 3125$.

Relación de fuerzas $(F = \gamma \cdot l^3)$

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\gamma_p}{\gamma_m} \cdot \lambda^3$$

Si $\gamma_p = \gamma_m$,

$$\boxed{\frac{F_p}{F_m} = \lambda^3}$$

Para $\lambda = 25$, $F_p/F_m = 15625$.

Relación de potencias $(P = F \cdot u)$

Si $\gamma_p = \gamma_m$,

$$\frac{P_p}{P_m} = \frac{F_p}{F_m} \cdot \frac{u_p}{u_m} = \lambda^3 \cdot \lambda^{1/2}$$

$$\boxed{\frac{P_p}{P_m} = \lambda^{7/2}}$$

Para $\lambda = 25$, $P_p/P_m = 78125$.

Semejanza de Reynolds

$$\mathrm{Re}_p = \mathrm{Re}_m$$

Relación de velocidades

$$\frac{l_p \cdot u_p}{\nu_p} = \frac{l_m \cdot u_m}{\nu_m}; \qquad \frac{u_p}{u_m} = \frac{\nu_p}{\nu_m} \cdot \frac{1}{l_p / l_m}$$

$$\boxed{\frac{u_p}{u_m} = \frac{\nu_p}{\nu_m} \cdot \frac{1}{\lambda}}$$

Por ejemplo, si $\lambda = 25$, $\nu_p = \nu_m$, y $u_p/u_m = 1/25$.

Con la semejanza de Froude, había que ensayar con una velocidad 5 veces menor, y con la Reynolds con una velocidad 25 veces mayor, por lo que no es posible que se cumplan las dos a la vez, a menos que la escala sea la unidad.

Podemos ensayar desde luego con un fluido diferente al del prototipo, y algo podríamos compensar. Menos mal que lo frecuente es que sólo intervenga una fuerza.

Relación de caudales $(\dot{m} = \rho \cdot Q = \rho \cdot S \cdot u)$

$$\frac{\dot{m}_p}{\dot{m}_m} = \frac{\rho_p}{\rho_m} \cdot \frac{S_p}{S_m} \cdot \frac{u_p}{u_m} = \frac{\rho_p}{\rho_m} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{\nu_p}{\nu_m} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{\frac{\dot{m}_p}{\dot{m}_m} = \frac{\rho_p}{\rho_m} \cdot \frac{\nu_p}{\nu_m} \cdot \lambda = \frac{\mu_p}{\mu_m} \cdot \lambda}$$

Relación de fuerzas $(F = l \cdot u \cdot \mu)$

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{l_p}{l_m} \cdot \frac{u_p}{u_m} \cdot \frac{\mu_p}{\mu_m} = \lambda \cdot \frac{\nu_p}{\nu_m} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\nu_p \cdot \rho_p}{\nu_m \cdot \rho_m}$$

$$\boxed{\frac{F_p}{F_m} = \left(\frac{\nu_p}{\nu_m}\right)^2 \cdot \frac{\rho_p}{\rho_m}}$$

Si se tratara del mismo fluido y en el mismo estado, $F_p = F_m$:

el mayor esfuerzo cortante en el modelo contrarresta su menor superficie de rozamiento.

Semejanza de Mach

$$\mathrm{Ma}_{\mathrm{p}} = \mathrm{Ma}_{\mathrm{m}}$$

Relación de velocidades

$$\frac{u_{\mathrm{p}}}{\sqrt{K_{\mathrm{p}} / \rho_{\mathrm{p}}}} = \frac{u_{\mathrm{m}}}{\sqrt{K_{\mathrm{m}} / \rho_{\mathrm{m}}}}$$

$$a\,(\text{velocidad del sonido}) = \sqrt{\frac{K}{\rho}}\ (\text{capítulo X})$$

$$\boxed{\frac{u_p}{u_{\mathrm{m}}} = \frac{a_p}{a_{\mathrm{m}}}}$$

Relación de caudales $(\dot{m} = \rho \cdot Q = \rho \cdot u \cdot S)$

$$\frac{\dot{m}_{\mathrm{p}}}{\dot{m}_{\mathrm{m}}} = \frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{m}}} \cdot \frac{u_{\mathrm{p}}}{u_{\mathrm{m}}} \cdot \frac{S_{\mathrm{p}}}{S_{\mathrm{m}}}$$

$$\boxed{\frac{\dot{m}_{\mathrm{p}}}{\dot{m}_{\mathrm{m}}} = \frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{m}}} \cdot \frac{a_{\mathrm{p}}}{a_{\mathrm{m}}} \cdot \lambda^2}$$

Relación de fuerzas $(F = K \cdot S)$

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{K_p}{K_m} \cdot \frac{S_p}{S_m} = \frac{K_p}{K_m} \cdot \lambda^2; \quad \text{y como} \quad a = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \ (\text{capítulo X})$$

$$\boxed{\frac{F_p}{F_m} = \frac{\rho_p}{\rho_m} \cdot \left(\frac{a_p}{a_m}\right)^2 \cdot \lambda^2}$$